数理解析研究所講究録
186巻 1973年 76-89



# 退化した放物型方程式について

名大 理 松沢忠人

## §1. 序

$\Omega$, $I$ をそれぞれ $R_x = (-\infty < x < \infty)$, $R_t = (-\infty < x < \infty)$ の開区間とし, $\Omega \times I$ で定義された次のような微分作用素について考える:

(1.1) $$P = \frac{\partial}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t).$$

係数に対する条件として

(1.2) $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in C^\infty(\Omega \times I)$,

(1.3) $\mathrm{Re}\, a(x,t) \geqq 0$ in $\Omega \times I$,

(1.4) ある非負整数 $l$ が存在して, 任意の $x \in \Omega$ を固定する時, $t$ の関数 $I \ni t \longmapsto \mathrm{Re}\, a(x,t)$ は $I$ に於て高々 $2l$ 次, 偶数次の零をもつ (c.f. Nirenberg & Treves [6]),

(1.5) $|\mathrm{Im}\, a(x,t)| \leqq C\, \mathrm{Re}\, a(x,t)$ in $\Omega \times I$,

$$(1.6) \qquad |\mathrm{Im}\, a_x(x,t)| \leqq C\,[\mathrm{Re}\, a(x,t)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega \times I,$$

$$(1.7) \qquad |b(x,t)| \leqq C\,[\mathrm{Re}\, a(x,t)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega \times I.$$

以上の条件の下に次の定理を得る。

定理1. 微分作用素 $P$ が (1.2), …, (1.7) の条件をみたすならば. $P$ は $\Omega \times I$ で hypoelliptic である.

例. 作用素

$$\frac{\partial}{\partial t} - (t^{2l} + x^{2m})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i(t^l + x^m)\frac{\partial}{\partial x} + 1, \quad l, m \text{ integers}, > 0$$

は. $R_x \times R_t$ の原点の近傍で上記の条件をみたす.

Parametrix を構成することによる放物型方程式の hypoellipticity の証明法が Mizohata, [5] によって与えられている。( c.f. Y. Kato, [4] ).
以下では. ほぼ [4], [5] の procedure を pseudo-differential operators ( Hörmander [1], [2] など ) の言葉で書きあらためることにより 定理1の証明が得られることを示す。
即ち, 方程式

$$(1.8) \qquad P_{x,t}\, E(x,y,t,t') = \delta(x-y,\, t-t') \quad \text{in } \Omega_x \times \Omega_y \times I_t \times I_{t'}$$

の近似解 ( Parametrix ) を構成することができることを示す。

## §2. Parametrices の構成.

$v(y,t') \in C_0^\infty(R^2_{y,t'})$ に対する部分 Fourier 変換を

$$(2.1) \qquad \hat{v}(\xi,t') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iy\xi} v(y,t')\, dy \ , \quad \xi \in R^1_\xi$$

のようにかこう。 以下では $I = (T_1 < t < T_2)$ とする。

今 $P$ の parametrix $K = K(x,y,t,t') \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y \times I_t \times I_{t'})$ が次の形にかけたと仮定する：

$$(2.2) \qquad [Kv](x,t) = \int_{T_1}^{t} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} K(x,\xi;t,t')\, \hat{v}(\xi,t')\, d\xi \Big)\, dt',$$

$$v(y,t') \in C_0^\infty(\Omega_y \times I_{t'}).$$

ここで $K(x,\xi;t,t')$ は $(t,t') \in I_t \times I_{t'}$ を parameter とする $\Omega = \Omega_x$ に於ける pseudo-differential operator の symbol であり， 従って

$$(2.3) \qquad K(x,y,t,t') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y,\xi)} K(x,\xi;t,t')\, d\xi$$

( Oscillatory sense, [2] )

とかけるものと仮定するのである。

例えば，

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

の場合には

$$K(x,\xi;t,t') = \begin{cases} e^{-\xi^2(t-t')} & t \geqq t' \\ 0 & t < t' \end{cases},$$

であり，

$$K(x,y,t,t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-t')}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-t')}\right]$$

であることは容易に確かめられる。

さて(2.2)のようにかけるものと仮定して，両辺に $P = P_{x,t}$ を施すと，

$$\begin{aligned} P[Kv](x,t) = \int_{T_1}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial t} - a(x,t)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\xi\Big)^2 &+ \\ + b(x,t)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\xi\Big) + c(x,t)\Big]&\cdot \\ \cdot K(x,\xi;t,t')\,\hat{v}(\xi,t')\,d\xi\,dt' &+ \\ + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} K(x,\xi;t,t')\,\hat{v}(\xi,t')\,d\xi\Big|_{t'=t} \end{aligned}$$

方程式(1.8)及び上記熱方程式の場合に示唆されて次のようなCauchy問題が考えられる:

$$(2.4)\quad \begin{aligned} &\Big[\frac{\partial}{\partial t} - a(x,t)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\xi\Big)^2 + b(x,t)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\xi\Big) + c(x,t)\Big]\cdot \\ &\qquad \cdot K(x,\xi;t,t') = 0 \quad \text{in } \Omega\times R_\xi\times\Delta, \\ &\qquad \Delta \equiv \{(t,t')\,;\, T_1 < t' < t < T_2\}, \end{aligned}$$

(2.5) $\quad K(x,\xi;t,t')\Big|_{t=t'} = 1,$

(2.6) $\quad K(x,\xi;t,t') = 0 \qquad t' > t.$

問題(2.4), (2.5)の解を次のような逐次近似の方法で解きたい。(2.4)の左辺の作用素を2つに分けて

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\xi^2 \qquad (\text{主要部}),$$

$$L_2 = -2i\xi\, a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + i\xi\, b(x,t) + c(x,t)$$

とおこう。これらは $\Omega_x \times R_\xi \times I_t$ における作用素である。

第1近似を求める:

(2.7) $\quad L_1 K_0 = \left[\frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\xi^2\right] K_0(x,\xi;t,t') = 0 \quad \text{in } \Omega_x \times R_\xi \times \Delta,$

(2.8) $\quad K_0(x,\xi;t,t')\Big|_{t=t'} = 1.$

これは $x, \xi, t'$, を parameter とする常微分方程式 (in $t$) の初期値問題であるが解 $K_0$ は次のように解ける:

(2.9) $\quad K_0(x,\xi;t,t') = \exp\left(-\int_{t'}^{t} a(x,\tau)\xi^2 d\tau\right) \quad \text{in } \Omega_x \times R_\xi \times \bar{\Delta},$

$$\bar{\Delta} \equiv \{(t,t');\ T_1 < t' \leq t < T_2\}.$$

$$K_0(x,\xi;t,t')=0 \qquad t<t'$$

としよう。

次に $K_j(x,\xi;t,t')$ , $j=0,1,2,\ldots$ を下のような初期値問題の解として逐次定義する：

(2.10) $$\left[\frac{\partial}{\partial t}+a(x,t)\xi^2\right]K_{j+1}(x,\xi;t,t')=-L_2K_j(x,\xi;t,t')$$
$$\text{in } \Omega_x\times R_\xi\times\Delta,$$

(2.11) $$K_{j+1}(x,\xi;t,t')\Big|_{t=t'}=0$$

(2.12) $$K_{j+1}(x,\xi;t,t')=0 \quad \text{if} \quad t<t'.$$

$K_{j+1}$ は容易に求まって、

(2.13) $$K_{j+1}(x,\xi;t,t')=-\int_{t'}^{t}\exp\left[-\int_s^t a(x,\tau)\xi^2d\tau\right]\cdot L_2K_j(x,\xi;s,t')\,ds$$
$$=-\int_{t'}^{t}K_0(x,\xi;t,s)\,L_2K_j(x,\xi;s,t')\,ds$$
$$\text{in } \Omega\times R_\xi\times\bar{\Delta}.$$

さて (2.2) 式のようにして $K_j(x,y,t,t')\in\mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_y\times I_t\times I_{t'})$ が次のように定義されるものとする：

(2.14) $$[K_jv](x,t)\equiv\int_{T_1}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}K_j(x,\xi;t,t')\hat{v}(\xi,t')\,d\xi\right)dt'$$
$$v\in C_0^\infty(\Omega_y\times I_{t'}).$$

即ち

(2.15) $$K_j(x,y,t,t') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} K_j(x,\xi;t,t')\,d\xi$$

と定義されるものとすると $K_j(x,\xi;t,t')$ の作り方 (c.f. (2.10)) から形式的な計算により

(2.16) $$P_{x,t}[K_0(x,y,t,t') + \cdots + K_\mu(x,y,t,t')]$$
$$= \delta(x-y,t-t') + \int_{T_1}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} L_2 K_\mu(x,\xi;t,t')\,d\xi$$

が成り立つことが分る。

次の§で (2.16) 式が実際に意味をもち $\sum_{j=0}^{\mu} K_j$ が parametrix としての性質をもっていることを説明する。

## §3. $K_j(x,\xi;t,t')$, $K_j(x,y,t,t')$ の性質まとめ。

記号を整理しておく.

$\Omega$ : $R_x = (-\infty < x < \infty)$ の開区間,

$I$ : $R_t$ の開区間 : $(T_1 < t < T_2)$,

$\Delta = \{(t,t')\,;\, T_1 < t' < t < T_2\}$,

$\bar{\Delta} = \{(t,t')\,;\, T_1 < t' \leq t < T_2\}$.

次に $\Omega$ に於ける pseudo-differential operator の symbol の定義を [2] から引用する:

$m, \rho, \delta$ は実数で $0 \leqq \rho \leqq 1$, $0 \leqq \delta \leqq 1$ とする。この時 $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times R_\xi)$ が $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi)$ に属する(次数 $m$, type $\rho, \delta$ の symbol である)とは、任意の compact set $K \subset \Omega$ と任意の整数 $\alpha, \beta$ ($\geqq 0$) に対してある定数 $C_{\alpha,\beta,K}$ が存在して不等式

(3, 1) $\quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqq C_{\alpha,\beta,K} (1+|\xi|)^{m-\rho\alpha+\delta\beta}, \; x \in K, \xi \in R^1_\xi$

が成り立つ時をいう。

$$S^{-\infty} = S^{-\infty}_{\rho,\delta} = \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}$$

と略記する。$S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi)$ は (3, 1) の best constants による位相で Fréchet 空間となる。

定義 3.1. $\Lambda \subset R_t \times R_{t'}$ に対して $K(x, \xi; t, t') \in \mathcal{E}^0(\Lambda; S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi))$ とは

i) $\quad K(x, \xi; t, t') \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi) \quad \forall (t, t') \in \Lambda$,

ii) $\quad (t, t')$ が $\Lambda$ を動く時、$K(x, \xi; t, t')$ は $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi)$ に値をとる連続写像となる。

定義 3.2. 同じく $\Lambda \subset R_t \times R_{t'}$ と整数 $p \geqq 0$ に対して $K(x, \xi; t, t') \in \mathcal{E}^p(\Lambda; S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times R_\xi))$ とは

i) $D^j_{t,t'} K(x,\xi;t,t') \in \mathcal{E}^0(\Lambda; S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times R_\xi))$ , $0\leqq j\leqq p$

ここで $D^j_{t,t'}$ は $t, t'$ に関する $j$ 次の微分を表わすものとする。

$\Omega$, $I$ を少し縮少することにより（それらを再び $\Omega$, $I$ とかくことにして）次の Proposition を得る。

Proposition 3.3. $\forall\varepsilon>0$ と $0<\forall\lambda<1$ に対して

$$(3.2)\qquad K_j(x,\xi;t,t') \in \bigcap_{p\geqq 0} \mathcal{E}^p\left(I; S^{\ell+2p-\frac{\lambda j}{2\ell+1}}_{1,\frac{2\ell}{2\ell+1}}(\Omega\times R_\xi)\right),\ j=0,1,2,\dots,$$

$$(3.3)\qquad |(K_0(x,\xi;t,t')-1)(1+|\xi|)^{-\varepsilon}| \rightrightarrows 0 \text{ in } \Omega\times R_\xi \text{ when } t\downarrow t',$$

$$(3.4)\qquad |D^p_{t,t'} D^\beta_x D^\alpha_\xi K_0 (1+|\xi|)^{\frac{-\beta\times 2\ell}{2\ell+1}-2p+\alpha-\varepsilon}| \rightrightarrows 0 \text{ in } \Omega\times R_\xi \text{ when } t\downarrow t' \text{ if } 2p<\alpha,$$

$$(3.5)\qquad |D^p_{t,t'} D^\beta_x D^\alpha_\xi K_j (1+|\xi|)^{\frac{-\beta\times 2\ell}{2\ell+1}-2p+\alpha+\frac{\lambda j}{2\ell+1}-\varepsilon}| \rightrightarrows 0 \text{ in } \Omega\times R_\xi \text{ when } t\downarrow t' \text{ if } 0\leqq p<j.$$

この命題の証明には次の二つの Lemma が基本的である。

Lemma 3.4. (c.f. [5], [6]) 条件 (1.3), (1.4) の下に任意の compact set $K\subset\Omega\times I$ に対してある定数 $C>0$ が存在して

$$(3.7)\qquad |\mathrm{Re}\ a_x(x,t)| \leqq C\,(\mathrm{Re}\ a(x,t))^{\frac{1}{2}} \qquad (x,t)\in K.$$

*Lemma* 3.5. (C.f. [6]) 条件 (1.3), (1.4) の下に, 任意の Compact set $K \subset \Omega \times I$ に対して ある定数 $\delta > 0$ が存在して

$$(3.8) \qquad \delta (t-t')^{2l+1} \leqq \mathrm{Re} \int_{t'}^{t} a(x,\tau)\, d\tau ,$$

ここで $(x,t), (x,t') \in K$ かつ $t' \leqq t$ とする。

さて Proposition 3.3 により.

$$K_j(x,y,t,t') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} K_j(x,\xi;t,t')\, d\xi, \quad j=0,1,\cdots,$$

$$F_j(x,y,t,t') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} L_2 K_j(x,\xi;t,t')\, d\xi, \quad j=0,1,\cdots,$$

は意味をもち. (2.16)一式が成り立つことが分る。
又. Prop. 3.3 から次のことが分る。

Proposition 3.6. $K_j(x,y,t,t')$, $F_j(x,y,t,t')$, $j=0,1,\cdots,$ は $W = \{(x,y,t,t') \in \Omega \times R_y \times I \times I \,;\, |x-y| + |t-t'| > 0\}$ に於て無限回微分可能である。 更に

$$(3.9) \qquad D_{t,t'}^{p} D_x^{\beta} D_y^{\alpha} K_j(x,y,t,t') \in C^0(\Omega_x \times R_y \times I \times I)$$

$$\text{if} \quad \frac{\beta \times 2l}{2l+1} + \alpha + 2p < \frac{j}{2l+1} - 1,$$

$$(3.10) \qquad D_{t,t'}^{p} D_x^{\beta} D_y^{\alpha} F_j(x,y,t,t') \in C^0(\Omega_x \times \Omega_y \times I \times I)$$

$$\text{if} \quad \frac{\beta \times 2l}{2l+1} + \alpha + 2p + 2 < \frac{j}{2l+1} - 1.$$

Proposition 3.7. 各 $K_j(x,y,t,t')$ は $(y,t')$ 及び $(x,t)$ に関して regular (Schwarz, [9] の意味で) である。

以上の考察をまとめると まず

$$\mathcal{L}_{x,t}\Big(\sum_{j=1}^{\mu} K_j(x,y,t,t')\Big) = \delta(x-y, t-t') + F_\mu(x,y,t,t'),\quad \mu = 0,1,2,\dots$$

が成り立ち. 命題3.6, と 3.7 とにより 次のことが分った。

(i) $\sum_{j=0}^{\mu} K_j(x,y,t,t') \in C^\infty(W)$, $\mu = 0,1,2,\dots,$

(ii) $\sum_{j=0}^{\mu} K_j(x,y,t,t')$ は Schwartz, [9] の意味で very regular である,

(iii) $F_\mu(x,y,t,t')$ は $\mu$ が大きくなるにつれて. $\Omega \times R_y \times I \times I$ に於て. より滑らかな関数となる.

以上の三つの事実から. $\mathcal{L}$ の共役作用素 ${}^t\mathcal{L}$ が $\Omega \times I$ で hypoelliptic なことが従う。 $t \to -t$ なる変換により. ${}^t\mathcal{L}$ が §1. の諸条件を満すことが分るから. 結局 $\mathcal{L}$ の $\Omega \times I$ に於ける hypoellipticity が分る。

以上. 定理1の 一つの証明法のあらましを述べた。最後に. 今考えられる問題を少し挙げておく。

問題1. 係数 $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ 及び右辺 $f(x,t)$ が $C^\infty(\Omega \times I)$ である上に $x$ー方向に解析的であ

る時 解 $u(x,t)$ も $x$-方向に解析的であることを証明する。

問題2. 係数に対して同じ条件の下に、

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(x,y,t,t')$$

が収束することを証明する。

問題3. 係数に対する滑らかさの仮定をもっと弱くして Parametrix (or 素解)を構成する。

問題4. もっと広い範囲の退化した放物型作用素に対して Parametrix (or 素解)を構成する。

例えば

a) 多変数の作用素の場合について考えること,

b) もっと essential に広い範囲の作用素に対して考察することなど。

## References


[1] Hörmander, L.: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), Singular integral operators, 138–183.

[2] Hörmander, L.: Fourier integral operators, I, Acta Math., 127 (1971), 79–183.

[3] Hörmander, L: Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1968), 147–171.

[4] Kato, Y.: The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, Jour. Funct. Analysis, Vol. 7, No.1 (1971), 116–131.

[5] Mizohata, S.: Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 15–50.

[6] Nirenberg, L. & Treves, F.: On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary conditions. Comm. Pure Applied Math., Vol. $2\overset{3}{\cancel{4}}$ (1970), 1–38.

[7] Treves, F.: A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. Pure Applied Math., Vol. 24 (1971), 71–115.

[8] Treves, F.: Analytic-hypoelliptic partial differential equations of principal type, Comm. Pure Applied

Math., Vol. 24 (1971), 537 – 570.

[9] Schwartz, L.: Théorie des distributions, Vol. I, Hermann, Paris, (1957).